2014학년도 숭실대학교 논술 모의고사

논술 모의고사 문제지(자연계)

지원학과(부)		수험번호		성　명	

※ 주의사항
① 답안지에 자신을 드러내는 표현을 쓰지 마시오.
② **검정색 필기구(볼펜 또는 사인펜)**만을 사용하여 답안을 작성 할 것.

【문제 1】

문제 1-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

확률변수 X는 다음의 두 가지 형태로 분류될 수 있다. 확률변수 X가 가지는 값이 유한개 또는 자연수와 같이 셀 수 있을 때의 이산확률변수와 확률변수 X가 어떤 구간에 속하는 모든 실숫값을 가질 때의 연속확률변수가 있다. 이산확률변수 X의 확률분포는 확률질량함수에 의해 나타내고, 연속확률변수 X의 확률분포는 확률밀도함수에 의해 나타낸다.

다음은 이번 겨울 어느 도시에 대한 기상청의 기상예보이다.

(a) 해당 기간은 2013년 12월 1일부터 2014년 3월 10일까지 총 100일이다.
(b) 이 기간에 눈이 오는 날은 총 30일로 예상된다.
(c) 눈이 오는 날의 1일 적설량을 확률변수 X라 할 때, X의 분포를 나타내는 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\quad x>\frac{4}{3} \\ x^{\frac{1}{5}}, & 0\le x\le 1 \\ -3x+4, & 1<x\le\frac{4}{3} \end{cases}\qquad (x\text{의 단위: 10인치})$$

(1) 당신은 작업용 스노우 부츠를 생산하는 회사의 기획부에 근무한다. 부츠의 높이를 1일 적설량의 최댓값($4/3\times10$인치)에 맞추는 것은 경제적이라 볼 수 없다. 따라서, 회사의 방침은 "부츠의 높이가 1일 적설량보다 높을 확률이 90%인 부츠"를 생산하는 것이다. 이 방침에 따라, 부츠의 높이를 계산하시오.

(2) 이 도시에서는 제설작업을 위하여 적설량 10인치 당 2톤의 염화칼슘이 필요하다. 이 도시에서 이번 겨울 제설 작업에 필요한 염화칼슘의 기댓값을 구하시오.

문제 1-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

크게 펼쳐진 천 위의 한 지점에는 염색제를, 다른 한 지점에는 표백제를 동시에 떨어뜨리고 그에 따른 염색의 진행상태를 관찰한 결과, 다음과 같은 사실을 알게 되었다.

(a) 천 위에서 염색제와 표백제는 둘 다 1 cm/s의 일정한 속력으로 모든 방향으로 퍼진다.
(b) 염색제가 천의 한 지점 P에 도달한 후
- 5초 이내에 표백제가 P에 도달하면 염색제가 제거된다.
- 5초를 경과한 후에 표백제가 P에 도달하면 염색제가 고착되어 염색이 유지된다.

(c) 천 위의 한 지점 P에 표백제가 염색제보다 먼저 도달하면 그 지점은 염색되지 않는다.

펼쳐진 천이 센티미터(cm) 단위의 좌표평면 전체라고 생각하고 염색제와 표백제는 평면 전체로 확산된다고 가정할 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 지점 $A(-4,0)$에는 염색제를, 지점 $B(4,0)$에는 표백제를 동시에 떨어뜨리는 실험을 할 때, 지점 $P(-4,6)$이 염색이 될지 또는 되지 않을지 논하시오.

(2) 문제 (1)의 실험에서 염색이 될 지점들의 영역을 구하고, 그 영역을 개략적으로 그리시오.

(3) 지점 $A(-4,0)$과 지점 $C(12,0)$에는 염색제를, 지점 $B(4,0)$에는 표백제를 동시에 떨어뜨리는 실험을 한다. 이때 염색이 될 지점들의 영역을 문제 (2)의 결과에서부터 유추하여 구하고, 그 영역을 개략적으로 그리시오.

【문제 2】

문제 2-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

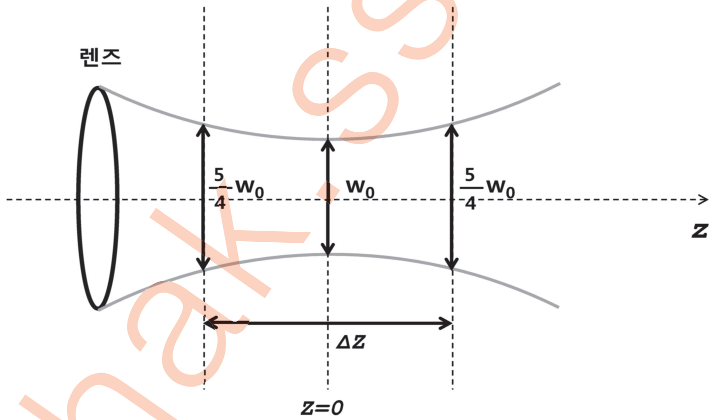
최근 화성에 착륙한 미국 NASA의 우주탐사로봇 Curiosity는 ChemCam이라는 분광계를 이용하여 화성 암석의 표면 성분을 분석하고 있다. 이 분광계는 암석 표면에 강력한 레이저 광선을 쏘아 구성 암석의 원소가 내보내는 빛의 스펙트럼을 분석하는 장치이다. 이 장치는 최대 7 미터 떨어진 암석을 분석할 수 있도록 설계되었다. 이러한 예에서 알 수 있는 것처럼 레이저의 과학적 이용에는 레이저의 출력세기 외에도 레이저 광선의 퍼짐현상, 초점심도 등을 조절하는 것이 필요하다.

(1) 레이저 광선의 퍼짐은 레이저 광선 단면의 반지름 w를 써서 기술할 수 있다. 레이저 광선이 진행하는 방향으로 좌표축 z를 잡고 레이저 광선이 발사되는 위치를 $z=0$이라 하자. w는 z가 증가함에 따라 다음 관계식에 의해 점점 증가하게 된다.

$$w(z) = w_o\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_o^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

이 식에서 w_0는 $z=0$에서의 광선 단면의 반지름, λ는 레이저 광선의 파장이다. 분광계로부터 d 만큼 떨어진 암석 표면에 입사되는 광선 단면적이 최소가 되도록 w_o를 조절하고자 한다. 이 때 암석 표면에 입사되는 광선의 단면적을 구하시오.

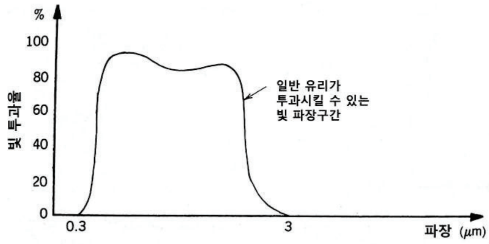
(2) 분광기에 렌즈를 삽입하면 레이저 광선을 더 멀리 보낼 수 있다. 렌즈를 이용하여 단면 반지름을 w_o의 크기로 모아주는 경우에도 위의 관계식이 적용된다. 이 때, 광선이 w_o의 크기로 모아진 지점의 위치를 $z=0$으로 잡는다 (아래 그림 참조). 광선의 단면 반지름이 w_o의 5/4인 위치 간의 거리를 초점심도 Δz로 정의하자. 초점심도 Δz를 구하시오.

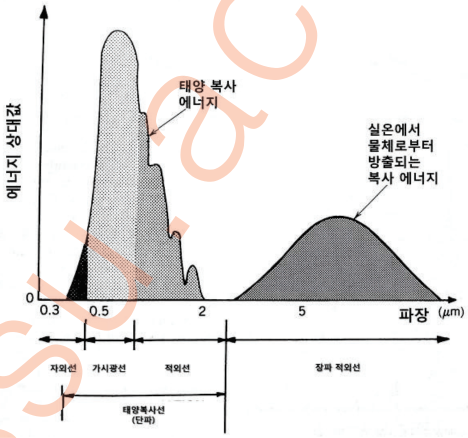


문제 2-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)

지구에 대기가 존재하지 않으면 태양에서 받는 빛에너지를 그대로 다시 방출할 것이다. 이러한 이론에 따라 계산해 보면 지구 표면의 온도는 약 -20℃까지 떨어지게 된다. 현재 지구의 평균기온은 약 15℃이기 때문에 30℃가 넘는 차이가 나는데, 이 차이가 바로 온실효과 때문에 생긴다. 핵융합 반응에 의해 고온을 유지하고 있는 태양은 태양복사에너지를 지구로 방출한다. 하지만 지구는 모든 태양복사에너지를 흡수하지 않고, 일부를 대기권에서 우주를 향하여 반사시키고, 나머지는 대기권이 지표면에서 반사 된 지구복사에너지를 흡수 후 주위에 재방출하여 복사평형을 유지한다. 위를 향한 재복사는 우주로 달아나지만, 아래를 향하는 재복사는 다시 지표면을 데운다. 이때 대기 중에 있는 여러 가지 온실기체는 지구가 방출하는 긴 파장의 빛을 흡수하여 그 에너지를 대기 중에 묶어 두게 된다. 이렇게 대기 중에 들어온 에너지는 기체 분자의 운동량을 증가시켜 대기의 온도가 상승한다. 즉, 현재의 온난화 현상이 있기 이전에도 온실효과는 지구의 대기와 함께 항상 있어 왔던 현상인 것이다. 여기에는 H_2O(수증기), CO_2, CH_4와 같은 온실기체가 관여하고 있으며 특히 CO_2가 가장 큰 작용을 한다. 지구온난화가 일어나는 것은 대기 중에 붙잡혀 있는 에너지의 양 자체가 증가한데 그 이유가 있다.

(1) 햇볕이 내리쬐는 동안 외벽이 유리인 건물의 내부 온도가 외부에 비해서 높아지는 이유를 위 제시문과 아래의 두 그래프들을 참고하여 설명하시오.





(2) 지구 온난화 방지 및 화석에너지 소비 감소를 위하여 정남향으로 배치된 서울지역 어떤 건축물 옥상에 태양광 전지판을 설치하고자 한다. 태양광 전지판의 발전효율이 가장 클 때는 정남향으로 설치될 때이고, 서울지역에서 태양은 지면으로부터의 각도가 평균 55°에 위치한다. 이 건물의 옥상에 아래의 조건을 만족하도록 설치할 수 있는 태양광 전지판의 최대 개수를 구하시오. [$\sin 35° = 0.57$, $\cos 35° = 0.82$, $\tan 35° = 0.70$]

[조건]
- 건축물 옥상은 가로, 세로 각각 30m인 정사각형 모양이다.
- 태양광 전지판 한 장의 크기는 가로, 세로 각각 1.0m 이다.
- 태양광 전지판의 설치각도는 지면으로부터 35°로 한다.
- 서울지역에서 태양이 정남향에 지면으로부터 각도가 55°인 위치에 있을 때를 기준으로,
  - 태양광 전지판의 그림자가 다른 전지판을 가리지 않도록 설치한다.
  - 태양광 전지판의 그림자가 옥상면을 벗어나지 않도록 설치한다.
- 태양광 전지판의 설치 최대 개수 계산 시 태양광 전지판의 두께는 무시한다.
- 태양광 전지판의 설치 또는 수리에 필요한 사람의 이동 공간 확보는 고려하지 않는다.

(3) 만약 태양이 정남향에 지면으로부터의 각도가 85°인 위치에 있을 때 (2)번에서 설치한 전지판에 입사하는 태양광 에너지의 양은 (2)번의 경우, 즉 그 태양의 각도가 55°인 경우에 비해 어떤 값일지 계산하시오. 단, 태양의 지면으로부터의 각도를 제외한 모든 조건은 동일하다. 그리고 단위 시간당 전지판에 입사하는 태양광 에너지의 양은 태양 광선이 전지판에 비추어질 때 태양 광선에 수직이 되는 가상의 평면에 생기는 그림자의 면적에 비례한다.

<끝>

자연계 문제 1 문제해설

[출제의도]

본 문제는 함수에 대한 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 적분 및 연속확률분포 모형에서의 확률과 기댓값 계산에 연결하는 창의적 학습능력, 그리고 기하학적인 현상을 분석하는 논리적 사고능력을 평가하는데 목적이 있다.

[예시답안]

문제 1-A

(1) $P(x<h)=0.9$인 h를 계산하여 그 높이 h의 부츠를 생산하면 된다. 즉, $\int_h^{\frac{4}{3}} f(x)\,dx=0.1$을 만족하는 h를 계산하여야 한다. 이때, $\int_0^1 x^{\frac{1}{5}}\,dx=\frac{5}{6}$이므로, h는 1보다 커야만 한다. 이 구간에서의 확률밀도함수는 $-3x+4$이다. 따라서 $\int_h^{\frac{4}{3}}(-3x+4)\,dx=0.1$을 만족하는 h를 찾으면 된다. 적분 계산 결과

$$-\frac{3}{2}x^2+4x\Big|_h^{\frac{4}{3}}=0.1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}h^2-4h+\frac{77}{30}=0$$

를 얻고, 여기서 h는 $\frac{4}{3}$ 보다 작아야 하므로, $h=\frac{4}{3}-\frac{1}{\sqrt{15}}$이 된다. 따라서, 부츠의 높이는 $\frac{40}{3}-\frac{10}{\sqrt{15}}$인치로 제작하면 된다.

(2) 겨울 100일 중 눈이 올 것으로 예상되는 날은 30일이다. 연속확률분포에서의 기댓값은 확률밀도함수와 적설량을 곱한 함수를 적분하여 계산하므로, 1일 적설량의 기댓값은 다음과 같다.

$$\int_0^1 x\cdot x^{\frac{1}{5}}\,dx+\int_1^{\frac{4}{3}}x(-3x+4)\,dx=\frac{5}{11}x^{\frac{11}{5}}\Big|_0^1+(-x^3+2x^2)\Big|_1^{\frac{4}{3}}=\frac{190}{297}.$$

10인치 당 2톤의 염화칼슘이 필요하므로, 1일 염화칼슘 필요예상량은 $\frac{380}{297}$톤이다. 따라서, 이 도시는 30일 분의 염화칼슘으로, 약 38.38톤의 염화칼슘이 필요할 것으로 기대된다.

문제 1-B

(1) 지점 $P(-4,6)$은 염색제가 퍼지기 시작하는 지점 $A(-4,0)$으로부터의 거리가 6이고, 표백제가 퍼지기 시작하는 지점 $B(4,0)$으로부터의 거리가 10이다. 따라서, 지점 P에는 6초 후에 염색제가 도달하고, 그 후로부터 4초 뒤에 표백제가 도달하므로, 염색제가 고착되기에는 시간이 충분치 않아 염색이 되지 않을 것이다.

(2) 염색이 이루어지는 지점들은 B로부터의 거리가 A로부터의 거리보다 5cm 이상 먼 지점들이다. 따라서, 염색이 이루어지는 지점들과 이루어지지 않는 지점들의 경계는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+5=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$-16x-25=10\sqrt{(x+4)^2+y^2}$$

을 얻는다. 다시 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같은 쌍곡선의 방정식을 얻는다.

$$156x^2 - 100y^2 - 975 = 0$$

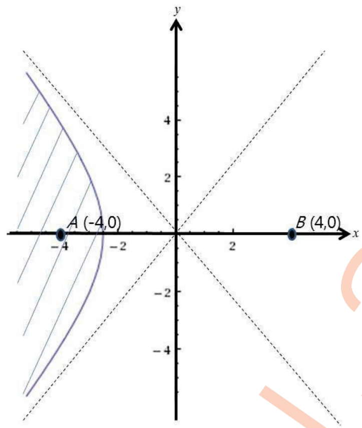
구하려는 경계점들은 이 쌍곡선 위의 점들 중에서 B로부터의 거리가 A로부터의 거리보다 먼 점들이므로

$$156x^2 - 100y^2 - 975 = 0, \quad x < 0$$

이 경계가 된다. 따라서 이 경계로 이루어진 영역 중 점 A를 포함하는 영역, 즉

$$D = \{(x, y) \mid 156x^2 - 100y^2 - 975 \ge 0,\ x < 0\}$$

이 염색이 되는 지점들의 영역이다. 이를 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



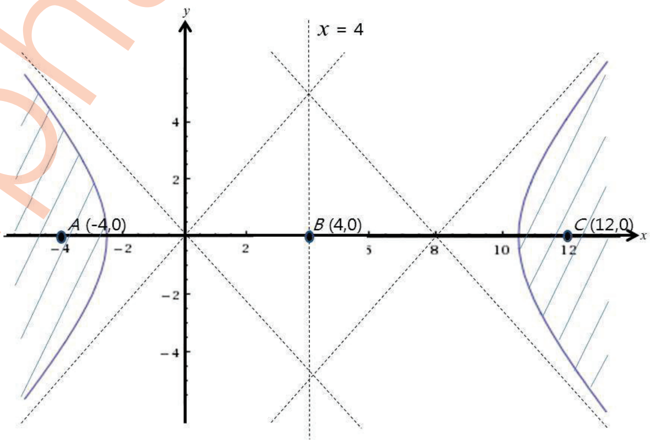
(3) 표백제가 속한 직선 $x=4$를 기준으로 볼 때, 이 직선 왼쪽 영역은 지점 A에서 출발하는 염색제가, 오른쪽 영역은 지점 C에서 출발하는 염색제가 먼저 도착한다. 따라서, 염색되는 영역은 직선 $x=4$를 기준으로 하여 왼쪽은 A와 B, 오른쪽은 B와 C에 의해 경계가 결정된다. A와 B 에 의해 결정되는 영역 D는 아래와 같이 문제 (2)에서 구하였다.

$$D = \{(x, y) \mid 156x^2 - 100y^2 - 975 \ge 0,\ x < 0\}$$

B와 C에 의해 결정되는 영역 D'은 (2)에서 구한 영역을 직선 $x=4$를 중심으로 대칭이동 하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$D' = \{(x, y) \mid 156(8-x)^2 - 100y^2 - 975 \ge 0,\ x > 8\}$$

따라서 염색이 되는 지점들의 영역은 $R = D \cup D'$이다. 이를 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



자연계 문제 2 문제해설

[출제의도]

본 문제는 빛과 에너지에 관한 현상을 담고 있는 제시문을 통하여 과학적 현상을 이해하고 분석하는 능력을 평가하는 문제이다. 특히 주어진 과학적 현상에 대한 수리적 모형을 세우고, 논리적인 추론을 통하여 문제를 해결하는 통합적 사고 능력을 평가하는 데 그 목적이 있다.

[예시답안]

문제 2-A

(1) 광선의 단면적은

$$S=\pi w^2=\pi w_o^2\left[1+\left(\frac{\lambda d}{\pi w_o^2}\right)^2\right]=\pi w_o^2+\frac{\lambda^2 d^2}{\pi w_o^2}$$

이므로, 이를 최소화하는 값을 찾기 위해 위의 식을 w_0로 미분한 일차도함수를 구하자.

$$\frac{dS}{dw_o}=2\pi w_o-\frac{2\lambda^2 d^2}{\pi}w_o^{-3}$$

w_0로 미분한 일차도함수 $\frac{dS}{dw_o}$ 가 음에서 양으로 변하는 점을 찾으면 되는데, 이차도함수

$$\frac{d^2 S}{dw_o^2}=2\pi+\frac{6\lambda^2 d^2}{\pi}w_o^{-4}$$

가 항상 양의 값을 가지므로, 일차도함수가 증가함수이고, 따라서 위의 일차도함수를 0으로 만드는 점을 찾으면 된다. 즉, $\frac{dS}{dw_o}=0$을 풀면

$$w_o^4=\frac{\lambda^2 d^2}{\pi^2}$$

을 얻고, 따라서

$$w_o=\sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}}$$

이다. 이를 면적의 식에 대입하면

$$S=\pi w^2=2\lambda d$$

를 얻는다.

(2) 단면 반지름이 w_0의 5/4가 되는 위치, 즉 $w=\frac{5}{4}w_0$를 만족하는 값을 z^*라 하면,

$$w=\frac{5w_o}{4}=w_o\left[1+\left(\frac{\lambda z^*}{\pi w_o^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

이다. 양변에서 w_0를 소거하면

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2=1+\left(\frac{\lambda z^*}{\pi w_o^2}\right)^2$$

를 얻고, 이를 정리하면

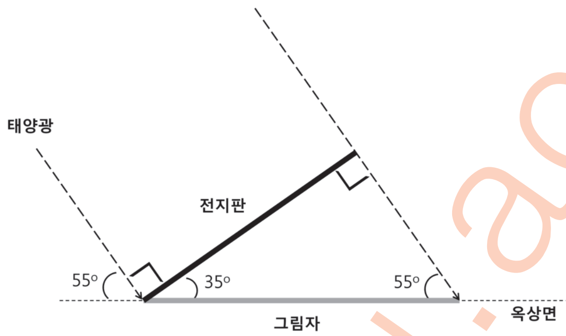
$$z^*=\pm\frac{\pi w_o^2}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}=\pm\frac{3\pi w_o^2}{4\lambda}$$

이다. 초점 심도 Δz는 이 두 위치 간의 거리이므로 $\frac{3\pi w_o^2}{2\lambda}$이다.

문제 2-B

(1) 제시문에서 설명한 것과 같은 온실효과에 의한 현상이다. 즉, 오른쪽 그래프에서 보듯이 태양복사선은 파장이 $0.3 \sim 2\mu m$로 짧은 반면에, 실온의 물체로부터 방출되는 빛은 파장이 $3\mu m$ 이상으로 긴 장파 적외선이다. 그런데, 왼쪽 그래프에서 보면 유리는 파장이 짧은 빛 (0.3~3 μm)은 투과를 잘 시키지만 파장이 긴 빛은 투과시키지 못한다. 따라서 외벽이 유리인 건물에 햇볕이 내리쬘 때 태양복사선은 유리를 쉽게 투과하여 건물 내부에 도달하고 건물 내무 물체들의 온도를 올리게 되지만, 건물 내부의 물체들이 내어놓는 파장이 긴 빛들은 유리를 투과하지 못하므로 유리 청사 내부에 그 에너지가 머무르게 된다. 이러한 온실효과 때문에 유리 청사는 햇볕이 내리쬘 때 외부보다 그 내부의 온도가 높게 유지된다.

(2) 전지판은 지면으로부터 35°의 각도로 정남향으로 설치되고, 태양광은 지면으로부터 55°의 각도로 비추므로 태양광이 전지판에 입사하는 각도는 아래 그림과 같이 $90^\circ = (180-(35+55))^\circ$ 이다.



위 그림에서 전지판 한 장의 그림자 세로 길이는 $\dfrac{1}{\cos 35^\circ}$ 미터이다. 따라서 옥상면의 세로 방향으로 전지판이 n장이 설치될 수 있다면, n은 다음 식을 만족하여야 한다.

$$n \times \frac{1}{\cos 35^\circ} \le 30 \qquad (n\text{은 양의 정수})$$

따라서 n은

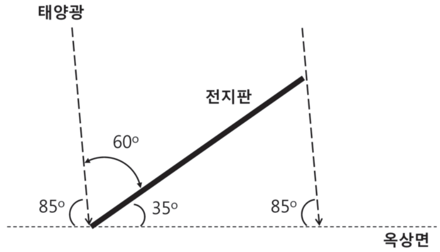
$$n \le 30\cos 35^\circ = 24.6$$

을 만족하는 가장 큰 양의 정수이므로, $n = 24$ 임을 알 수 있다. 즉, 옥상면의 세로방향으로는 전지판을 최대 24장 설치할 수 있다.
한편 전지판 한 장의 그림자 가로 길이는 전지판의 가로 길이와 동일하게 1 미터이므로, 옥상면의 가로방향으로는 전지판을 30장 설치할 수 있다.
따라서 옥상면에 설치할 수 있는 태양광 전지판의 최대 개수는 $24 \times 30 = 720$ 장이다.

(3) 전지판에 대한 태양광선의 입사각은 문제(2)의 경우는 90° 이다. 한편, 이번 경우의 그 입사각은

$$60^\circ = (180-(35+85))^\circ$$

이다 (아래 해설그림 참조).



이 경우 태양 광선에 수직인 가상의 평면에 생기는 전지판 그림자의 면적은 전지판 면적의 $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 이 경우 전지판에 입사하는 태양광 에너지의 양은 (2)번 경우의 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.